

УЧЕБНАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ НА ПОВОРОТЕ

Ляпцев А. В.¹, доктор физ.-мат. наук, ✉ upm_eno@mail.ru

¹Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,
набережная реки Мойки, д. 48, 191186, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Предложена математическая модель движения автомобиля на повороте. Движение автомобиля описывается на основе моделирования силы сухого трения, действующей на колеса автомобиля так, чтобы она учитывала характерные особенности, связанные с качением колеса, и соответствовала закону Кулона-Амонтона при блокировке колес. Из законов механики выводится математическая модель движения автомобиля, представляющая систему из 6 дифференциальных уравнений 1-го порядка, включающую ряд параметров, характеризующих движение. Численное решение системы уравнений может быть достаточно просто получено учащимися при использовании стандартных процедур, имеющихся в математических средах, предназначенных для математического моделирования (MATLAB, Octave и др.). Исследование решений модели фактически представляет собой вычислительный эксперимент и позволяет, несмотря на простоту модели, выявить некоторые качественные особенности движения автомобиля, проявляющиеся на практике.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, математическая модель, движение под действием силы сухого трения, модель движения автомобиля.

Цитирование: Ляпцев А. В. Учебная модель движения автомобиля на повороте // Компьютерные инструменты в образовании. 2024. № 4. С. 44–58. doi:10.32603/2071-2340-2024-4-44-58

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи на движение автомобиля предлагаются в курсе физики при изучении силы сухого трения. В типовой задаче рассматривается равномерное движение автомобиля или, например, мотоциклиста по окружности. Автомобиль моделируется материальной точкой, на которую действует сила сухого трения. В предположении, что колеса автомобиля катятся без скольжения, так что сила сухого трения является силой трения покоя, максимальное значение которой определяется законом Кулона-Амонтона, математическое описание приводит к неравенству, выполнение которого необходимо для движения по окружности:

$$\frac{v^2}{\mu g R} < 1. \quad (1)$$

Обычно из трех параметров в неравенстве, где v — скорость автомобиля, R — радиус окружности и μ — коэффициент трения, в условии задаются два параметра и требуется

найти третий (ускорение свободного падения g считается известным). Что происходит при нарушении неравенства (1), обычно не рассматривается, иногда считают, что автомобиль «уходит в занос».

Достаточно очевидно, что радиус поворота автомобиля определяется величиной поворота передних колес. Детальное рассмотрение кинематики на повороте обычно происходит уже при изучении специальных дисциплин, связанных с техникой автомобиля [1–5]. Стандартная схема кинематики поворота приведена на рис. 1.

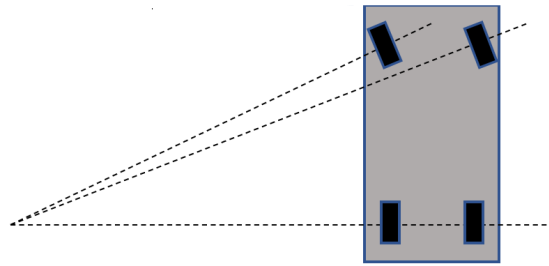


Рис. 1. Кинематическая схема движения автомобиля на повороте.

Считается, что каждое колесо катится без проскальзывания по окружности соответствующего радиуса, и центр всех окружностей лежит в точке пересечения линий, нормальных к плоскостям колес. Небольшое различие в углах поворота передних колес обеспечивается специальным механизмом рулевого управления [6].

Более детальное изучение движения автомобиля (см., например, [6–9]) показывает, что на самом деле вышеприведённые простейшие модели адекватно описывают движение на повороте лишь в случае, когда левая часть неравенства (1) существенно меньше единицы. То есть какая-либо оценка, следующая из неравенства, справедлива лишь по порядку величины того или иного параметра. Это связано с тем, что при качении колеса сила трения, действующая в направлении, перпендикулярном плоскости колеса (боковая сила трения в терминологии Рокара [7]), появляется лишь в случае, когда вектор скорости центра колеса не лежит в плоскости колеса. Схема движения колеса изображена на рис. 2.

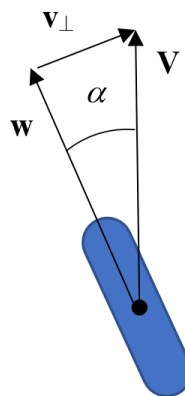


Рис. 2. Схема движения колеса при наличии боковой силы трения

Скорость центра колеса V складывается из скорости w , с которой колесо катится по дороге, и скорости бокового смещения $v_{\perp}$ (здесь и далее для обозначения векторов используется

жирный шрифт). Сила бокового трения при этом направлена противоположно скорости $\mathbf{v}_\perp$. Подобное движение в терминологии Рокара называется *боковым уводом*. При малых углах α сила бокового трения пропорциональна углу α :

$$F = K\alpha, \quad (2)$$

а константа K называется *коэффициентом бокового увода*.

С точки зрения физики, причина явления бокового увода объясняется частично тем, что колесо испытывает деформацию (проявляется в основном при малых углах α), а частично тем, что колесо начинает проскальзывать при движении по поверхности. При обычном движении автомобиля боковой увод практически не ощущается. Однако при экстремальном вождении, например при автогонках проскальзывание колес по дороге, становится существенным, что приводит к быстрому износу шин. Например, в гонках «Формула 1» дистанция, на которых происходит износ шин в результате проскальзывания, составляет 200–300 км, что, конечно, существенно меньше, чем дистанция, на которой работают шины обычного автомобиля.

Проблема устойчивости движения автомобиля на повороте с учетом возможности бокового увода является достаточно сложной с точки зрения математического анализа. Подробное описание приведено в книге [7]. При этом во время выхода книги (иностраный вариант в 1954 г.) какой-либо численный анализ предлагаемой модели был затруднен, поскольку вычислительные методы ещё не получили широкого распространения в науке и образовании. В настоящее время численное исследование модели оказывается гораздо проще, чем при использовании аналитических методов, и может быть проведено в рамках обучения математическому моделированию. Это, в частности, связано с распространением вычислительных сред, таких как MATLAB, Octave и др., в которых имеются процедуры решения систем дифференциальных уравнений. В данной работе мы сформируем достаточно простую модель движения автомобиля на повороте, которая позволяет провести учебный вычислительный эксперимент и найти качественные особенности такого движения.

2. МОДЕЛЬ СИЛЫ ТРЕНИЯ

Моделирование силы трения, действующей на колеса автомобиля, представляет собой достаточно сложную задачу [6–8]. При обучении математическому моделированию целесообразно вначале исходить из наиболее простой модели, постепенно усложняя её по мере необходимости [9]. Простейшая модель формулируется как закон Кулона–Амонтона, в соответствии с которым сила трения определяется математическим выражением:

$$\mathbf{F} = -\mu N \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|}. \quad (3)$$

В этом выражении вектор $\mathbf{U}$ — скорость тела относительно поверхности, N — модуль силы давления тела на поверхность и μ — коэффициент трения. В случае одномерного движения ($v_x \neq 0, v_y = v_z = 0$) график зависимости проекции силы на ось x от проекции скорости v_x , соответствующий закону (3), представляет собой ступенчатую функцию с разрывом в нуле (рис. 3). При нулевом значении модуля скорости значение силы однозначно не определено и зависит от других параметров, описывающих состояние системы.

Подобная разрывная функция оказывается неудобной для численного моделирования процесса движения, поскольку разрывные функции в системах дифференциальных

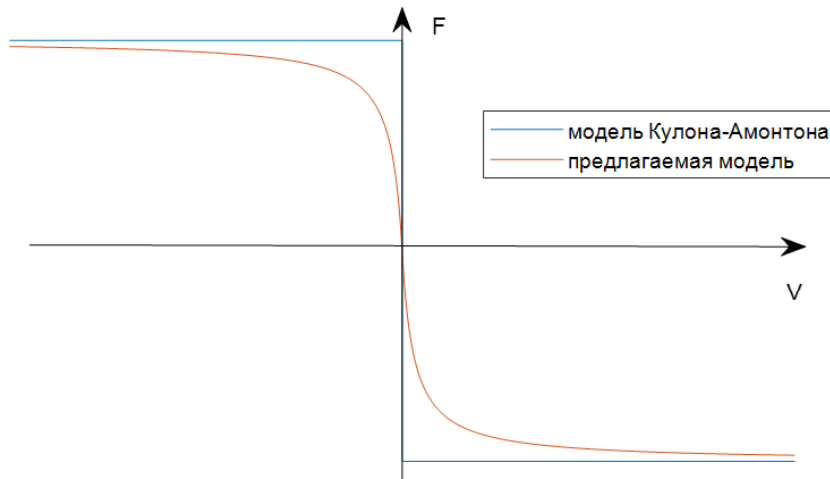


Рис. 3. Графики моделей зависимости силы трения, действующей на колесо, от скорости поверхности колеса относительно дороги в случае одномерного движения

уравнений осложняют нахождение численных решений. Кроме того, подобная модель не учитывает бокового увода колеса при движении на повороте, о котором говорилось выше. Получить непрерывную (сглаженную) функцию, переходящую при предельном значении некоторого параметра в функцию (3), можно, добавив в знаменатель правой части равенства (3) некоторую положительную константу:

$$F = -\mu N \frac{U}{|U| + \delta}.$$

График сглаженной функции изображен также на рис. 3. Параметр δ в данной модели характеризует интервал величины скорости, в пределах которого сила изменяет знак. Получить подобную сглаженную функцию для силы трения можно и с помощью других математических функций, которые приведены, например, в работе [8, с. 27]. Очевидно, что вблизи нулевого значения скорости ($|U| \ll \delta$) сила линейно зависит от скорости. Для случая, когда рассматривается эффект бокового увода колеса (рис. 2), следует положить $|U| = v_{\perp}$. Несложно показать, что при малых углах скольжения α линейная зависимость (2) силы трения от угла получается, если положить $\delta = \xi w$, где w — модуль скорости, с которой колесо катится по дороге, а ξ — некоторая положительная константа. Учитывая эти соображения, будем использовать для силы трения, действующей на колесо, модель, определяемую выражением:

$$F = -\mu N \frac{U}{|U| + \xi w}. \quad (4)$$

При этом под скоростью w будем понимать модуль скорости поверхности колеса относительно его центра, независимо от того, насколько велико проскальзывание колеса по дороге. В предельном случае, соответствующем явлению бокового увода ($\xi w \gg |U|$), для модуля силы получим:

$$F = \mu N \frac{v_{\perp}}{\xi w} = \frac{\mu N}{\xi} \frac{v_{\perp}}{w} \approx \frac{\mu N}{\xi} \alpha.$$

Таким образом, коэффициент бокового увода, определенный Рокаром, связан с параметрами нашей модели соотношением:

$$K = \frac{\mu N}{\xi}. \quad (5)$$

В другом предельном случае, когда $\xi w \ll |U|$, несложно получить поправку к модулю силы μN , определяемому законом Кулона-Амонтона:

$$\Delta F = -\frac{(\mu N)^2}{K \operatorname{tg} \alpha}.$$

Такое же выражение, отличающееся лишь численной константой, получается для некоторых моделей силы трения, рассматриваемых в книге [6].

Отметим также ещё один предельный случай, когда колесо перестает вращаться ($w = 0$), который реализуется, например, при блокировке колес. В этом случае выражение (4) полностью соответствует закону Кулона-Амонтона.

Для проведения численных расчетов необходимы некоторые численные оценки констант, входящих в выражение (4). Коэффициент трения μ может принимать в зависимости от свойств шин и дороги значения примерно от 0,5 для хорошей дороги до 0,05 для скользких участков. Оценка коэффициента бокового увода приведена в книге Рокара [7]: $K \approx 6N$. Из формулы (5) следует оценка для константы ξ , входящей в формулу для силы трения (4):

$$\xi = \frac{\mu N}{K} \approx \frac{\mu}{6}.$$

Таким образом, можно считать, что значение ξ лежит в интервале от 0,1 до 0,01, причем чем лучше сцепление шины с дорогой, тем меньше коэффициент ξ .

3. МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ ПРИ ПОВОРОТЕ

Модель движения автомобиля формулируем в виде двухколесного экипажа. Такая модель иногда используется для описания движения автомобиля (см. [6]). Схема модели изображена на рис. 4. Считаем, что центр масс автомобиля находится посередине между колесами. Обозначения углов ясны из рисунка, $\mathbf{v}$ — скорость центра масс автомобиля, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор от центра масс к переднему колесу.

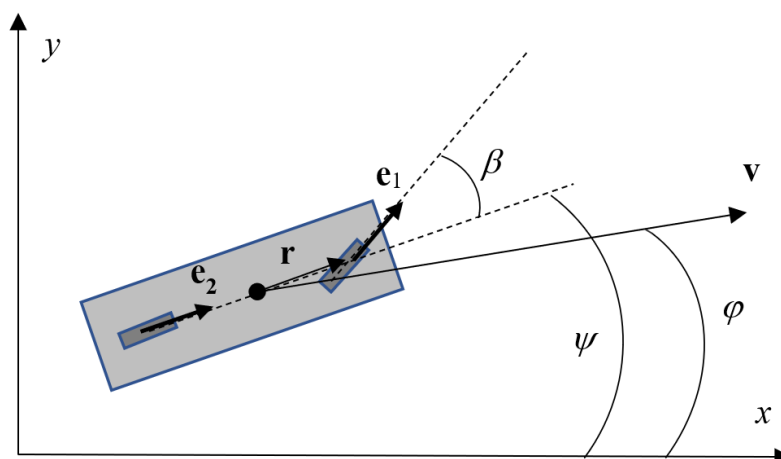


Рис. 4. Схема, иллюстрирующая модель движения автомобиля

Силы трения, действующие на колеса, можно представить в виде:

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu mg}{2} \frac{\mathbf{u}_i}{|\mathbf{u}_i| + \xi w_i}. \quad (6)$$

где m — масса автомобиля, индекс $i = 1$ относится к переднему колесу, а $i = 2$ — к заднему колесу. Скорость $\mathbf{u}_i$ — скорость точки колеса, касающейся в данный момент поверхности дороги, относительно этой поверхности можно представить в виде суммы:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{ri} + \mathbf{w}_i, \quad (7)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость центра масс автомобиля, $\mathbf{v}_{ri}$ — скорость оси i -го колеса относительно центра масс, обусловленная поворотом автомобиля, $\mathbf{w}_i$ — скорость точки на внешней поверхности колеса относительно оси колеса, обусловленная вращением колеса (в формулу (6) входит модуль этой скорости). Скорости, связанные с вращением автомобиля, можно выразить через угловую скорость вращения автомобиля вокруг центра масс $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{v}_{r1} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_{r2} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (8)$$

где использовано стандартное обозначение для векторного произведения.

Выражения для скоростей $\mathbf{w}_i$ зависят от того, ведущее это колесо или нет. Чтобы определить их направления, введем единичные векторы, лежащие в плоскости колес (рис. 4):

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\psi + \beta) \\ \sin(\psi + \beta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Будем считать, что ведущее колесо (колесо, вращаемое двигателем) вращается с постоянной скоростью, так что скорость поверхности колеса относительно оси равна по модулю v_0 . Вектор скорости $\mathbf{w}_i$ такого колеса определяется выражением:

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{e}_i v_0. \quad (10)$$

Чтобы определить скорость вращения свободного колеса (не связанного с двигателем), рассмотрим проекции сил трения на направления, определяемые векторами $\mathbf{e}_i$. Эти силы пропорциональны проекциям скоростей $\mathbf{u}_i$ на векторы $\mathbf{e}_i$. Если эти составляющие сил трения отличны от нуля, то они создают моменты сил, изменяющие угловые скорости вращения колес. Соответствующие угловые ускорения пропорциональны составляющим сил трения и обратно пропорциональны моментам инерции колес. Мы будем далее считать, что моменты инерции колес малы, так что не связанное с двигателем колесо быстро изменяет скорость вращения таким образом, что составляющая сил трения вдоль колес становится равной нулю. Это можно записать в виде:

$$(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{e}_i) = ((\mathbf{v} + \mathbf{v}_{ri}) \cdot \mathbf{e}_i) + (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{e}_i) = 0,$$

где использовано стандартное обозначение для скалярного произведения векторов. Отсюда следует выражение для скоростей $\mathbf{w}_i$ свободных колес:

$$\mathbf{w}_i = -\mathbf{e}_i ((\mathbf{v} + \mathbf{v}_{ri}) \cdot \mathbf{e}_i). \quad (11)$$

Уравнение движения центра масс автомобиля после сокращения параметра массы сводится к виду:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu g}{2} \left(\frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1| + \xi w_1} + \frac{\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2| + \xi w_2} \right), \quad (12)$$

где скорости определены формулами (7)–(11). Здесь и далее точка над переменной обозначает производную по времени. Векторное уравнение (12) эквивалентно двум скалярным уравнениям, которые получаются проектированием этого уравнения на оси, изображенные на рис. 4. Далее везде мы будем рассматривать равенство (12) как два уравнения.

Вращательное движение автомобиля моделируем, как вращение твердого тела относительно центра масс (изображен точкой на рис. 4). Динамика вращения определяется моментами сил трения:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1, \quad \mathbf{M}_2 = -\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

так что уравнение вращательного движения может быть записано в виде:

$$I\dot{\omega} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2, \quad (13)$$

где I — момент инерции относительно центра масс. Выражение для момента инерции может быть представлено в виде:

$$I = kmr^2,$$

где k — безразмерная константа. Максимальное значение момента инерции соответствует модели твердого тела из двух одинаковых точечных масс, соединенных невесомым стержнем, для которой $I_{\max} = mr^2$. Таким образом, значение параметра k должно быть меньше единицы.

Поскольку все векторы в уравнении (13) направлены вдоль вертикальной оси z , это уравнение можно переписать в скалярном виде:

$$\dot{\omega} = \frac{\mu g}{2k} \left(\frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{u}_2)_z}{|\mathbf{u}_2| + \xi w_1} - \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{u}_1)_z}{|\mathbf{u}_1| + \xi w_2} \right), \quad (14)$$

Для того, чтобы система уравнений была полной, необходимо к трем уравнениям (12) и (14) добавить ещё уравнение:

$$\dot{\psi} = \omega. \quad (15)$$

Для численного расчета удобно сделать масштабное преобразование переменных. Для этого положим $\mu g = 1$ и $r = 1$. Единица скорости в этих переменных равна $\sqrt{\mu g r}$. Например, для обычного легкового автомобиля расстояние между осями колес приблизительно 3 м. Коэффициент трения резины о сухой асфальт около 0,5. В результате для единицы скорости получим значение около 3 м/с, или 10 км/ч. Соответственно единица времени после масштабных преобразований равна $\sqrt{\frac{r}{\mu g}}$. При $\mu = 0,5$ единица времени приблизительно равна 0,5 с.

Система четырех уравнений (12), (14), (15) представляет собой автономную систему дифференциальных уравнений 1-го порядка. В общем виде такая система может быть записана следующим образом:

$$\dot{W}_i = F_i(\{W_j\}).$$

Подобная система является диссипативной, если выполняется соотношение:

$$\text{div}(\mathbf{F}) < 0.$$

Не сложно проверить, что система уравнений (12), (14), (15) является диссипативной.

Для диссипативных систем имеет место свойство, в соответствии с которым область траектории системы в фазовом пространстве постоянно сжимается, так что траектория

стремится к некоторому множеству точек, называемому аттрактором. Для двумерного фазового пространства аттрактором может быть либо точка, либо замкнутая кривая, называемая предельным циклом. Для фазового пространства с числом измерений больше 2 предельным циклом может быть еще так называемый странный, или хаотический аттрактор. Анализ возможности появления того или иного аттрактора — довольно сложная задача, и проведен он в общем случае может быть только численными методами.

Чтобы найти зависимости координат центра масс автомобиля от времени к системе уравнений (12), (14), (15) нужно добавить два дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, \\ \dot{y} &= v_y.\end{aligned}\tag{16}$$

4. ДВИЖЕНИЕ В ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ МАЛЫХ СКОРОСТЕЙ

При численной реализации математической модели возникает необходимость тестирования модели в частных и предельных случаях, когда возможно применение аналитических методов [9, 10]. В данной модели таким предельным случаем является движение со скоростями, при которых левая часть неравенства (1) существенно меньше единицы и проскальзыванием колес при движении можно пренебречь. Схема, иллюстрирующая такое движение, приведена на рис. 5.

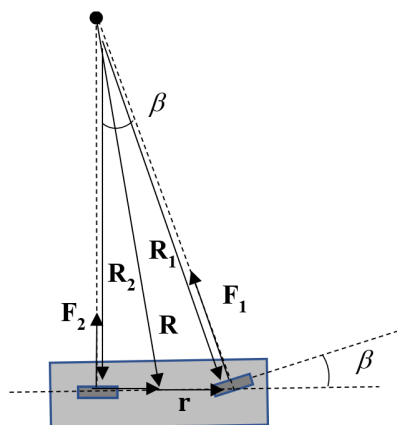


Рис. 5. Схема движения автомобиля в отсутствие скольжения колес

Считаем движение равномерным, тогда сумма моментов сил трения относительно центра окружности равна нулю. Это означает, что силы направлены к центру окружности вдоль радиусов R_i . Кроме того, модули сил F_i пропорциональны модулям векторов R_i . Это следует из равенств:

$$|F_1 \times r| = |F_2 \times r|, \quad |R_1 \times r| = |R_2 \times r|.$$

Первое из этих равенств следует из равенства модулей моментов сил относительно центра масс, второе — из равенства площадей треугольников с одинаковыми основаниями, равными r . Таким образом, имеет место равенство: $F_i = -CR_i$. Константа C определяется из уравнения динамики для центра масс:

$$F_1 + F_2 = -m\omega^2 R = -m\omega^2 \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Отсюда следует равенство:

$$\mathbf{F}_i = -\frac{m\omega^2}{2}\mathbf{R}_i.$$

При увеличении угловой скорости при том же повороте руля силы трения увеличиваются. При моделировании силы трения законом Кулона-Амонтона ($\xi \rightarrow 0$) скольжение колес начинается, когда максимальная из этих сил (сила F_1) достигает значения $\mu mg/2$. Таким образом, отсутствие проскальзывания можно описать неравенством:

$$\mu g \geq \omega^2 R_1.$$

Выражая R_1 через параметр r и угол поворота руля β , получим неравенство для угловой скорости, соответствующее отсутствию скольжения:

$$\omega^2 \leq \frac{\mu g \sin \beta}{2r}.$$

Это неравенство можно записать как ограничения на скорости колес автомобиля:

$$v_1 \leq v_{1\max} = \sqrt{\frac{2\mu gr}{\sin \beta}}, \quad v_2 \leq v_{2\max} = \cos \beta \sqrt{\frac{2\mu gr}{\sin \beta}}, \quad (17)$$

где индекс 1 относится к передним, а индекс 2 — к задним колесам. Это означает, что при движении переднеприводного автомобиля скорость движения ведущего колеса v_0 должна быть ограничена значением $v_{1\max}$, а при движении заднеприводного автомобиля — значением $v_{2\max}$.

5. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ

Система из 6 уравнений (12), (14), (15), (16) определяет эволюцию 6 переменных: x, V_x, y, V_y, ψ и ω . После проведения преобразований масштаба система уравнений содержит лишь 4 дополнительных параметра: k, β, v_0 и ξ . Кроме того, модель позволяет рассмотреть 2 случая различных приводов автомобиля: заднеприводный и переднеприводный. Для конкретного набора параметров система имеет единственное решение при задании всех переменных в некоторый начальный момент времени. Переменные x и y не входят в явном виде в систему уравнений, так что без потери общности их начальные значения можно положить равными 0. Также без потери общности можно положить $V_y(0) = 0$, выбрав направления осей так, что в начальный момент автомобиль двигается вдоль оси x . Задание остальных переменных влияет на зависимость характера движения от времени. Однако, как показывает численный эксперимент, по истечении некоторого времени движение системы приобретает регулярный характер с квазипериодической зависимостью переменных от времени. Аттрактор системы представляет собой замкнутую линию в 6-мерном фазовом пространстве. Параметры аттрактора зависят от параметров k, β, v_0 и ξ , однако не зависят от начальных условий. Чаще всего аттрактор соответствует равномерному движению по окружности. При некоторых параметрах на подобное равномерное движение накладываются периодические колебания величины угла между осью симметрии и скоростью автомобиля (угол $\psi - \varphi$ — на рис. 4).

Таким образом, с учетом безразмерных переменных и введенных параметров система уравнений для определения движения автомобиля может быть выражена следующим образом. Два уравнения, определяющие движение центра масс, могут быть запи-

саны в векторном виде, где каждый из векторов имеет две проекции на оси координат x и y , изображенные на рис. 4:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1| + \xi w_1} + \frac{\mathbf{u}_2}{|\mathbf{u}_2| + \xi w_2} \right),$$

где индексы 1 и 2 соответствуют передним и задним колесам, $\mathbf{u}_i = \mathbf{v} + \mathbf{v}_{ri} + \mathbf{w}_i$, $\mathbf{v}_{r1} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}_{r2} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos(\psi + \beta) \\ \sin(\psi + \beta) \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$. Векторы $\mathbf{w}_i$ принимают различные значения в зависимости от того, какое из колес является ведущим. Для ведущих колес (связанных с двигателем): $\mathbf{w}_i = -\mathbf{e}_i v_0$. Для ведомых колес (не связанных с двигателем): $\mathbf{w}_i = -\mathbf{e}_i ((\mathbf{v} + \mathbf{v}_{ri}) \cdot \mathbf{e}_i)$. Через w_i обозначены модули векторов $\mathbf{w}_i$. Третье уравнение является скалярным и определяет вращение автомобиля относительно центра масс:

$$\dot{\omega} = \frac{1}{2k} \left(\frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{u}_2)_z}{|\mathbf{u}_2| + \xi w_2} - \frac{(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{u}_1)_z}{|\mathbf{u}_1| + \xi w_1} \right),$$

Три других уравнения определяют координаты центра масс и угол поворота автомобиля ψ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x, \\ \dot{y} &= v_y, \\ \dot{\psi} &= \omega. \end{aligned}$$

Полученная система из шести обыкновенных дифференциальных уравнений решалась при следующих начальных условиях:

$$x(0) = y(0) = V_y(0) = \psi(0) = \omega(0) = 0, \quad V_x(0) = v_0.$$

Такое задание начальных условий приближенно может соответствовать движению, когда, равномерно поворачивая по дороге с хорошим покрытием, автомобиль неожиданно оказывается на скользкой поверхности (участок обледенелой дороги). В качестве примера на рис. 6 приведены траектории движения центра масс заднеприводного автомобиля, а на рис. 7 — траектории движения для переднеприводного автомобиля. Каждая пара рисунков соответствует различным временным интервалам.

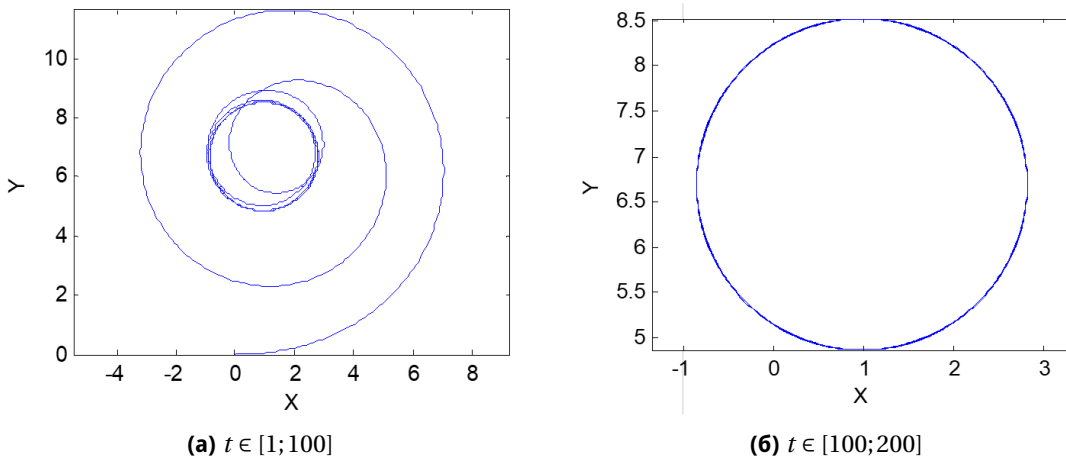


Рис. 6. Траектории движения центра масс заднеприводного автомобиля при следующих значениях параметров: $k = 0,5$, $\xi = 0,1$, $\beta = 20^\circ$, $v_0 = 2,1$

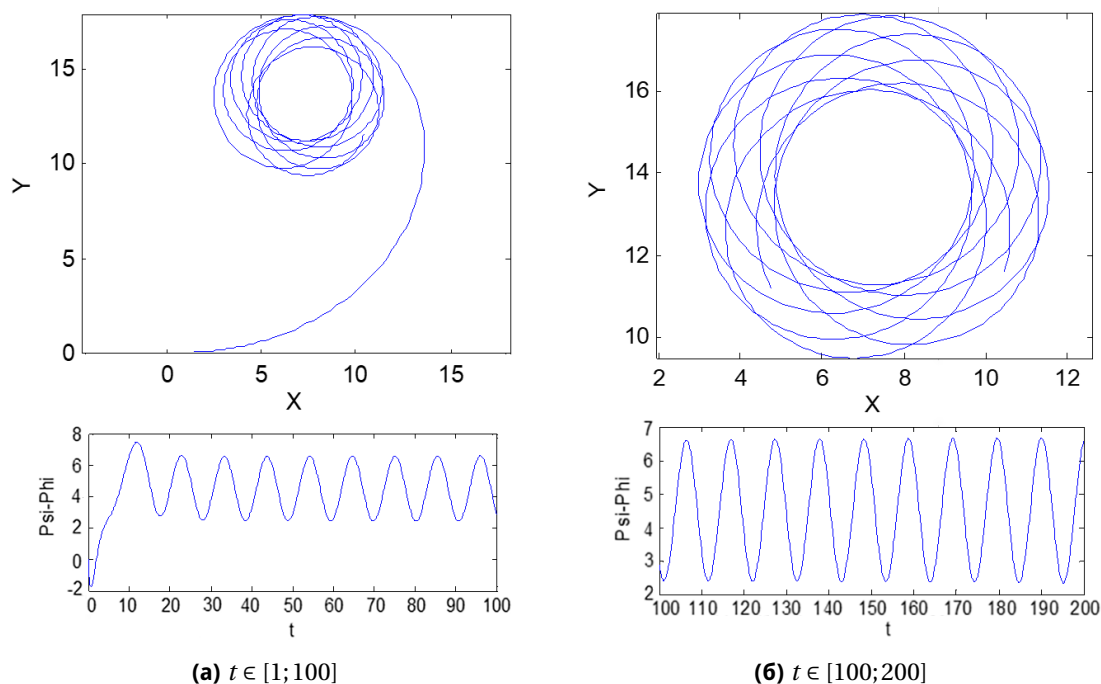


Рис. 7. Траектории движения центра масс переднеприводного автомобиля (верхние графики) и зависимости от времени разности углов $\psi - \varphi$ (нижние графики, углы в градусах). Значения параметров: $k = 0,5$, $\xi = 0,01$, $\beta = 55^\circ$, $\nu_0 = 3,9$

6. КАЧЕСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ, СЛЕДУЮЩИЕ ИЗ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

К сожалению, каких-либо расчетов, наглядно иллюстрирующих движение автомобиля при начале проскальзывания колес в доступной литературе найти не удалось. Однако адекватность модели можно проверить тестированием на предельных случаях малых скоростей и сравнением качественных особенностей движения для автомобилей с разными приводами.

Численный эксперимент показывает, что при достаточно малых скоростях, когда скорость движения колес ν_0 , связанных с двигателем, удовлетворяет соотношениям (17), то есть $\nu_0 < \nu_{1\max}$ для переднеприводного автомобиля и, соответственно, $\nu_0 < \nu_{2\max}$ для заднеприводного автомобиля, движение происходит практически без проскальзывания колес. При увеличении скорости ν_0 колеса начинают проскальзывать. Иллюстрирующие графики приведены на рис. 8.

На графиках приведены значения отношений u_i / ν_0 , выраженные в процентах. Здесь u_i — модуль скорости касающейся дороги поверхности колеса относительно дороги, ν_0 — скорость поверхности колеса относительно оси колеса, приблизительно равная скорости автомобиля (подробно эти величины определены при описании модели движения). Как видно из графиков, при малых скоростях проскальзывания практически нет. Вертикальные линии соответствуют значениям $\nu_{1\max}$ и $\nu_{2\max}$. Из графиков видно, что существенное проскальзывание колес по дороге возникает при нарушении неравенств $\nu_0 < \nu_{1\max}$ и $\nu_0 < \nu_{2\max}$ соответственно.

Как следует из графиков, приведенных на рис. 6, заднеприводный автомобиль спустя некоторое время начинает двигаться равномерно по окружности. Такое же движение мо-

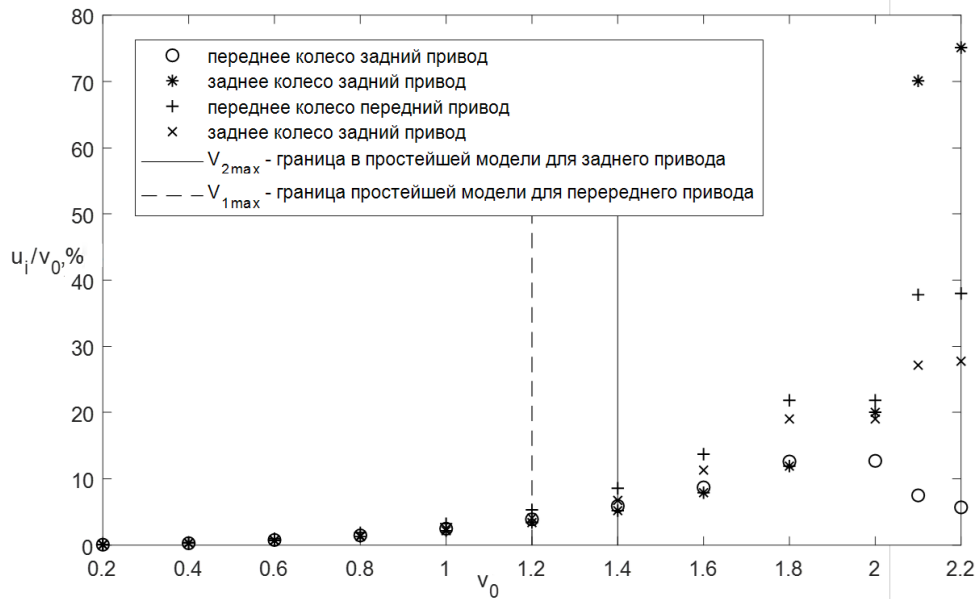


Рис. 8. Графики, иллюстрирующие адекватность модели при малых скоростях. Вычисления приведены при значениях параметров: $k = 0,5$, $\xi = 0,1$, $\beta = 20^\circ$

жет реализовываться для переднеприводного автомобиля. Однако при некоторых наборах параметров (малые значения параметра ξ и достаточно большие значения параметра v_0) к движению по окружности переднеприводного автомобиля добавляются осцилляции угла $\psi - \varphi$. Движение становится квазипериодическим. Соответствующие графики изображены на рис. 7.

Отметим ещё некоторые качественные особенности установившегося движения, которые могут быть получены путем вычислительного эксперимента.

1. Установившееся движение при малом значении параметра ξ и достаточно большом значении параметра v_0 таково, что одни колеса скользят по поверхности, а другие катятся по дороге, практически не проскальзывая. Так, для переднеприводного автомобиля передние колеса скользят, а задние катятся практически без проскальзывания. Для заднеприводного автомобиля реализуются варианты, такие же как и для переднеприводного, однако возможны и противоположные по характеру случаи. Подобное свойство соответствует теореме Пригожина о минимуме производства энтропии для открытых систем, способных к самоорганизации [11, 12]. В данном случае это означает минимум производства тепловой мощности, то есть минимального значения производимого тепла в единицу времени.

2. Движение переднеприводного автомобиля при $v_0 > v_{1\max}$ остается устойчивым. При этом резкой смены характера движения при увеличении скорости не происходит. При малом значении параметра ξ движение таково, что проскальзывают в основном передние колеса, а задние катятся практически без скольжения. При больших углах β установившееся движение происходит по окружности, при небольших углах β на круговое движение накладываются осцилляции (рис. 7). В случае больших скоростей v_0 характер установившегося движения соответствует движению материальной точки по окружности с центростремительным ускорением μg и скоростью $v_0 \cos \beta$. соответственно радиус окружности определяется соотношением $R = \frac{(v_0 \cos \beta)^2}{\mu g}$. Заметим, что подобное движение можно вывести, используя аналитические методы в пределе $\xi \rightarrow 0$.

3. Движение заднеприводного автомобиля является неустойчивым при увеличении скорости v_0 . Вначале при $v_0 > v_{2\max}$ начинается проскальзывание колес, причем при больших углах β скользят в основном передние колеса. При скорости, превышающей некоторое критическое значение, которое зависит от параметров β и ξ , резко изменяется характер движения. При установившемся вращении автомобиля центр масс начинает двигаться по окружности радиуса по величине сравнимого с размером автомобиля. Следует отметить, что такое движение является вполне реальным. Например, гонщики иногда отмечают такими «пончиками» свою победу (видео можно найти в [13]).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемая модель, безусловно, не может описать все нюансы движения автомобиля. Теория движения автомобиля в настоящее время активно развивается, что связано, в частности с развитием беспилотного автотранспорта. Однако, по сравнению с простейшим описанием движения на основе модели Кулона-Амонтона для силы трения, данная модель позволяет проиллюстрировать некоторые качественные особенности движения автомобиля, когда начинается проскальзывание колес.

Анализ возможностей различных видов движения учащимися, с одной стороны, не является сложным, после того как написана программа, соответствующая предлагаемой модели. С другой стороны, он может представлять интерес для учащихся, что безусловно мотивирует их к изучению основ математического моделирования [9]. Заметим, что, обладая навыками программирования, учащиеся могут создать анимацию соответствующего движения.

Возможные уточнения модели связаны, во-первых, с рассмотрением четырех колес вместо двух и, во-вторых, с учетом влияния центробежной силы на различие в давлениях колес на дорогу.

Учет четырех колес вместо двух несколько усложняет расчет, однако не изменяет числа уравнений. В уравнении (12) вместо двух появляется четыре слагаемых, соответствующих четырём колесам. При этом для скоростей v_{ri} следует взять соотношения: $\mathbf{v}_{ri} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, где каждый из векторов $\mathbf{r}_i$ является радиус-вектором, определяющим центр i -го колеса относительно центра автомобиля. Уравнение (14) также будет содержать четыре слагаемых вида: $\frac{\mu g}{2k} \frac{(\mathbf{r}_i \times \mathbf{u}_i)_z}{|\mathbf{u}_i| + \xi w_i}$. Данные поправки оказываются существенными, когда радиус окружности, по которой движется автомобиль становится сравним с поперечными размерами автомобиля (расстоянием между колесами в паре).

Второе уточнение модели учитывает дополнительный момент сил, связанных с движением центра масс с ускорением. Силы давления колес на поверхность оказываются различными. Учесть это можно, приравняв сумму моментов сил давления и момента силы инерции, вычисленные относительно какой-либо точки на поверхности дороги к нулю. Система уравнений в этом случае становится существенно более сложной и вряд ли возможной для учебных целей. Данные поправки оказываются тем более существенными, чем выше над дорогой расположен центр масс автомобиля.

Список литературы

1. Балакина Е. В., Зотов Н. М. и др. Устойчивость движения колесных машин. Волгоград: РПК «Политехник», 2011. 464 с.

2. Кравец В. Н., Селифонон В. В. Теория автомобиля. Учебник для вузов. М.: ООО «Гринлайт», 2011. 884 с.
3. Селифонон В. В., Хусаинов А. Ш., Ломакин В. В. Теория автомобиля: Учебное пособие (рекомендовано УМО). М.: МАМИ, 2007. 102 с.
4. Сазонов, И. С., Ким В. А., Чой К. Й. Теория автомобиля. Могилев: «Белорусско-Российский университет», 2017. 164 с.
5. Артемов И. И., Чуфистов Е. А., Уханов А. П., Чуфистов О. Е. Теория автомобиля: учебное пособие для обучающихся высших учебных заведений по специальности 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства» по дисциплине С1.1.35 «Теория автомобиля». Пенза: Изд-во ПГУ, 2022. 302 с.
6. Rajamani R. Vehicle Dynamics and Control. Springer, 2011.
7. Рокар И. Неустойчивость в механике. М.: Иностранная литература, 1959.
8. Левин М. А., Фуфаев Н. А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989.
9. Dolgopolas V., Dagiene V., Pozdniakov S., Liaptsev A. Developing Computational Thinking Skills to Foster Student Research: Contemporary Scientific Education Through Modeling and Simulations. Rezaei, N. (eds) // Integrated Education and Learning. Integrated Science. Springer, Cham, 2022. Vol. 13. P. 417–443. doi:10.1007/978-3-031-15963-3_23.
10. Кондратьев А. С., Ляпцев А. В. Математическое моделирование: аналитические и вычислительные методы // Компьютерные инструменты в образовании. 2007. № 5. С. 20–24.
11. Осипов А. И. Термодинамика вчера, сегодня, завтра. Часть 2. Неравновесная термодинамика // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 5. С. 91–97.
12. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971.
13. Doughnut (driving). Wikipedia [Электронный ресурс]. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Doughnut_\(driving\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Doughnut_(driving)) (дата обращения: 27.12.2024).

Поступила в редакцию 01.12.2024, окончательный вариант — 27.12.2024.

Ляпцев Александр Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры методики обучения физике РГПУ им. А. И. Герцена, ✉ upm_eno@mail.ru

Computer tools in education, 2024

№ 4: 44–58

<http://cte.eltech.ru>

doi:10.32603/2071-2340-2024-4-44-58

An Educational Model of the Movement of a Car on a Turn

Liapzev A. V.¹, Doctor sc., Professor, ✉ upm_eno@mail.ru

¹ Herzen State Pedagogical University of Russia,
Moika river embankment, 48, 191186, Saint Petersburg, Russia

Abstract

A mathematical model of the movement of a car in a turn is proposed. The movement of the car is described based on modeling the dry friction force acting on the wheels of the car, so that it takes into account the characteristic features associated with the rolling of the wheel and corresponds to the Coulomb-Amonton law when the wheels are locked. A mathematical model of car movement is derived from the laws of mechanics, representing a system of 6 1st-order differential equations, including a number of parameters characterizing movement. The numerical solution of a system of equations can be obtained quite simply

by students using standard procedures available in mathematical environments designed for mathematical modeling (MATLAB, Octave, etc.). The study of the model's solutions is actually a computational experiment and allows, despite the simplicity of the model, to identify some qualitative features of the car's movement that manifest themselves in practice.

Keywords: *computer simulation, mathematical model, motion under the action of dry friction force, car motion model.*

Citation: A. V. Liapzev, "An Educational Model of the Movement of a Car on a Turn," *Computer tools in education*, no. 4, pp. 44–58, 2024 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2024-4-44-58

References

1. E. V. Balakina et al., *Ustoichivost' dvizheniya kolesnykh mashin* [Stability of movement of wheeled vehicles], Volgograd, Russia: RPK «Politekhnik», 2011 (in Russian).
2. V. N. Kravets and V. V. Selifonov, *Teoriya avtomobilya. Uchebnik dlya vuzov* [Automobile Theory. Textbook for Universities], Moscow: Grinlait, 2011 (in Russian).
3. V. V. Selifonov, A. Sh. Khusainov, and V. V. Lomakin, *Teoriya avtomobilya : Uchebnoe posobie* [Automobile Theory: Study Guide], Moscow: Moskovskii gosudarstvennyi mashinostroitel'nyi universitet (MAMI), 2007 (in Russian).
4. I. S. Sazonov, V. A. Kim, and K. I. Choi, *Teoriya avtomobilya* [Theory of the car], Mogilev, Belarus: Belorussko-Rossiiskii universitet, 2017 (in Russian).
5. I. I. Artemov et al., *Teoriya avtomobilya: uchebnoe posobie dlya obuchayushchikhsya vysshikh uchebnykh zavedenii po spetsial'nosti 23.05.01 "Nazemnye transportno-tekhnologicheskie sredstva" po distsipline S1.1.35 "Teoriya avtomobilya"* [Theory of the car: Textbook], E. A. Chufistova ed., Penza: Izd-vo PGU, 2022 (in Russian).
6. R. Rajamani, *Vehicle Dynamics and Control*, Springer, 2011.
7. Y. Rocard, *Instability in mechanics*, Moscow: Inostrannaya literatura, 1959 (in Russian).
8. M. A. Levin and N. A. Fufaev, *Teoriya kacheniya deformiruemogo kolesa* [Theory of rolling of a deformable wheel], Moscow: Nauka, 1989 (in Russian).
9. V. Dolgopolas, V. Dagiene, S. Pozdniakov, and A. Liaptev, "Developing Computational Thinking Skills to Foster Student Research: Contemporary Scientific Education Through Modeling and Simulations," N. Rezaei ed., *Integrated Education and Learning. Integrated Science*, vol. 13, pp. 417–443, 2022; doi:10.1007/978-3-031-15963-3_23
10. A. S. Kondrat'ev and A. V. Lyaptev, "Matematicheskoe modelirovanie: analiticheskie i vychislitel'nye metody" [Mathematical modeling: analytical and computational methods], *Computer tools in education*, no. 5, pp. 20–24, 2007 (in Russian).
11. A. I. Osipov, "Termodinamika vchera, segodnya, zavtra. Chast' 2. Neravnovesnaya termodinamika" [Thermodynamics yesterday, today, tomorrow. Part 2. Nonequilibrium thermodynamics], *Sorosovskii obrazovatel'nyi zhurnal*, no. 5, pp. 91–97, 1999 (in Russian).
12. D. N. Zubarev, "Neravnovesnaya statisticheskaya termodinamika" [Nonequilibrium statistical thermodynamics], Moscow: Nauka, 1971 (in Russian).
13. "Doughnut (driving)," in *wikipedia.org*, 2025. [Online]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Doughnut_\(driving\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Doughnut_(driving))

Received 01-12-2024, the final version — 27-12-2024.

Alexander Liapzev, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of Methods of Teaching Physics at Herzen University, ✉ upm_eno@mail.ru